JOURNAL OF ALGEBRA 15, 133–141 (1970)

Sur l'Enveloppe Injective des Anneaux Semi-Premiers à Idéal Singulier Nul

A. CAILLEAU ET G. RENAULT

Faculté des Sciences, Université de Poitiers à Poitiers, France

Communicated by P. M. Cohn

Received July 1, 1969

INTRODUCTION

On dit qu'un anneau unitaire A est un *anneau de Baer*, si l'annulateur à gauche (ou à droite—c'est équivalent) d'un sous-ensemble non vide de A est engendré par un idempotent. Comme exemples de tels anneaux, citons les anneaux réguliers au sens de Von Neumann auto-injectifs à gauche (ou à droite). Dans [6] Kaplansky a montré que tout anneau de Baer admet une décomposition unique en produit d'anneaux de Baer de types I_{fin} , I_∞ , II_{fin} , II_∞ , III.

Un problème intéressant consiste en la détermination des anneaux A dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ est un anneau régulier auto-injectif à gauche de l'un des types cités ci-dessus. Ce problème a été abordé par Renault [8] dans un cas très particulier; les principaux résultats ont été obtenus par Roos [10].

Dans ce travail, nous nous proposons notamment de caractériser les anneaux semi-premiers dont l'enveloppe injective est de type I et de démontrer que l'enveloppe injective d'un anneau réduit (i.e. sans éléments nilpotents non nuls) est le produit d'un anneau fortement régulier et d'un anneau régulier de type III. Les principaux résultats de cet article ont été annoncés dans [2].

PRÉLIMINAIRES

Un anneau unitaire A est dit *à idéal singulier à gauche nul*, si aucun élément de A différent de zéro, n'est annulé par un idéal à gauche essentiel de A. Dans ce qui suit, $\hat{A}$ désignera l'enveloppe injective du A-module à gauche A; on sait ([3], p. 498) que $\hat{A}$ est un anneau régulier auto-injectif à gauche. Un idéal à gauche J de A sera dit complément relatif d'un idéal à gauche I, si J est un élément maximal de l'ensemble des ideaux à gauche X de A tels que

$X \cap I = 0$. On appellera idéal *complément*, tout idéal à gauche J qui est complément relatif d'un idéal à gauche. J est un idéal complément, s'il n'admet pas d'extension essentielle propre dans A, ce qui est équivalent ([7], p. 9) à l'existence d'un idempotent e de $\hat{A}$ tel que $J = \hat{A}e \cap A$.

Un idempotent e d'un anneau A est dit *abélien*, si les idempotents de l'anneau eAe commutent, *fidèle* si la relation $he = e$, où h est un idempotent central de A, implique $h = 1$. e est dit *fini*, si dans l'anneau eAe, la relation $xy = e$ implique $yx = e$. Un anneau de Baer est de type I, s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type III s'il ne contient pas d'idempotents finis non nuls [6].

On appelle anneau *fortement régulier* [11], tout anneau A régulier et réduit; les idempotents de A sont alors centraux et tous les idéaux sont bilatères. Nous allons donner diverses caractérisations des anneaux fortement réguliers.

PROPOSITION 0.1. *Pour un anneau régulier A, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est fortement régulier.*

(ii) *Quels que soient x et y éléments de A, la relation $Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$.*

(iii) *Quels que soient e et f idempotents de A, la relation $Ae \cap Af = 0$ entraîne $ef = 0$.*

(iv) *Les idempotents de A commutent.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) Les idéaux de A étant bilatères, xy appartient à l'intersection $Ax \cap Ay$, et par suite $xy = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Evident.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) On vérifie sans peine que si deux idempotents de A engendrent le même idéal à gauche, ils sont égaux. Soient e et f deux idempotents de A; on pose

$$Ae \cap Af = Ag$$

$$Ae = Ag \oplus Ah$$

$$Af = Ag \oplus Ak,$$

où g, h et k sont des idempotents de A. La remarque ci-dessus montre que $e = g + h, f = g + k$, ce qui entraîne $ef = fe = g$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Le treillis des idéaux à gauche principaux de A est distributif et l'assertion résulte du théorème 1.1 de [11].

Un anneau A est dit *semi-premier* s'il ne contient pas d'idéaux à gauche nilpotents, non nuls. On rappelle la propriété suivante:

PROPOSITION 0.2. *Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul; si e est un idempotent de A, $e\hat{A}e$ est l'enveloppe injective du eAe-module à gauche eAe.*

$e\hat{A}e$ est un anneau auto-injectif à gauche [5], il suffit donc de démontrer que eAe est essentiel dans $e\hat{A}e$. Soit exe un élément non nul de $e\hat{A}e$, il existe un idéal à gauche J essentiel dans A tel que $Jexe$ soit un idéal non nul de A. A étant semi-premier $(Jexe)^2$ n'est pas nul et par suite $eJexe$ est un idéal non nul de $eAe \cap eAexe$.

I. ENVELOPPES INJECTIVES DE TYPE I

Dans ce paragraphe, A désignera un anneau unitaire à idéal singulier à gauche nul, dont l'enveloppe injective sera notée $\hat{A}$.

On dira qu'un idéal à gauche X de A vérifie la condition (C) si:

(C) Pour tout couple (x, y) d'éléments de X la relation $Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$

PROPOSITION 1.1. *Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul; pour tout idempotent e de $\hat{A}$, considérons les propriétés suivantes:*

(i) *e est un idempotent abélien de $\hat{A}$*

(ii) *Si X et Y sont deux idéaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ et vérifiant $X \cap Y = 0$, on a* $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$.

(iii) *$\hat{A}e \cap A$ vérifie la condition (C)*

(iv) *$\hat{A}e \cap A$ est extension essentielle d'un idéal à gauche I de A vérifiant la condition (C).*

Alors on a les implications:

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)};$$

et si de plus A est semi-premier, les quatre propriétés sont équivalentes.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si X et Y sont deux idéaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ leurs enveloppes injectives $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ peuvent se mettre sous la forme $\hat{X} = \hat{A}f$, $\hat{Y} = \hat{A}g$, où f et g sont deux idempotents de $\hat{A}e$. De l'hypothèse $X \cap Y = 0$ on déduit $\hat{A}f \cap \hat{A}g = 0$. Il en résulte que, si a est un élément de $\hat{A}$ on a, en posant $B = e\hat{A}e$, $Baf \cap Bg = 0$; ceci entraîne, compte tenu du fait que l'anneau B est fortement régulier, $egaf = 0$ (Proposition 0.1, (ii)), et a fortiori $g(egaf) = gaf = 0$. Le $\hat{A}$-module $\mathrm{Hom}(\hat{A}f, \hat{A}g)$ égal à $g\hat{A}f$ est donc nul, et par suite $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ est nul.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soient f et g deux idempotents de l'anneau $B = e\hat{A}e$ tels que $Bf \cap Bg = 0$; nous allons montrer que $gf = 0$, ce qui permettra de conclure en vertu de la proposition 0.1 (propriété (iii)). L'hypothèse $Bf \cap Bg = 0$ entraîne $\hat{A}f \cap \hat{A}g = 0$; s'il existait un homomorphisme non nul φ de $\hat{A}f$ dans $\hat{A}g$, on pourrait trouver deux idéaux X et Y de A, inclus dans $\hat{A}f$ et $\hat{A}g$ respectivement et tels que φ induise un homomorphisme non nul de X dans Y. X et Y vérifieraient les hypothèses du (ii) et $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$. Ceci étant impossible on a $g\hat{A}f = \mathrm{Hom}(\hat{A}f, \hat{A}g) = 0$ d'où $gf = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si x et y sont deux éléments de $\hat{A}e \cap A$ tels que $Ax \cap Ay = 0$ on a $\mathrm{Hom}(Ax, Ay) = 0$, ce qui implique $xy = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Evident.

Supposons maintenant l'anneau A semi-premier et montrons l'implication: (iv) $\Rightarrow$ (ii). Soient X et Y deux ideaux à gauche de A inclus dans $\hat{A}e \cap A$ et tels que $X \cap Y = 0$. Considérons un homomorphisme φ de X dans Y, soit x un élément de $X \cap I$ dont l'image $y = \varphi(x)$ soit dans $Y \cap I$. Pour tout élément a de A on a $Ay \cap Aax = 0$ soit, en vertu de (C), $yax = 0$; d'autre part l'annulateur de x étant inclus dans l'annulateur de y on a, d'après ce qui précède, $yAy = 0$, soit $(Ay)^2 = 0$, et comme A est semi-premier $y = 0$. On a donc montré que $\varphi(X \cap I) \cap I = 0$, d'où $\varphi(X \cap I) = 0$, soit enfin $\varphi(X) = 0$ puisque A est à idéal singulier à gauche nul.

THÉORÈME 1.2. *Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul; considérons les deux propriétés suivantes:*

(i) *$\hat{A}$ est de type I.*

(ii) *Tout idéal à gauche non nul X de A, contient un idéal à gauche non nul Y vérifiant la condition (C).*
Alors on a l'implication

$$(i) \Rightarrow (ii),$$

et si de plus A est semi-premier les deux propriétés sont équivalentes.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Il suffit de démontrer l'assertion dans le cas où X est un idéal à gauche complément dans A. X se met alors sous la forme $\hat{A}f \cap A$ où f est un idempotent de A. $\hat{A}$ étant de type I, l'idéal $\hat{A}f$ contient un idempotent abélien non nul e (théorème 1 de [9]) et d'après la proposition 1.1, $y = \hat{A}e \cap A$ vérifie la condition (C).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pour démontrer que $\hat{A}$ est de type I, il suffit de vérifier que pour tout idempotent f de $\hat{A}$, il existe un idempotent abélien non nul e contenu dans $\hat{A}f$ [6]. $X = \hat{A}f \cap A$ est un idéal à gauche complément dans A qui par hypothèse contient un idéal à gauche Y non nul vérifiant (C). Si $\hat{A}e$ est l'enveloppe injective de Y, $\hat{A}e \cap A$ est extension essentielle de l'idéal à gauche Y de A vérifiant (C) et, d'après la proposition 1.1, e est un idempotent abélien de $\hat{A}$.

PROPOSITION 1.3. *Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul tel que $\hat{A}$ soit de type I; alors A ne contient pas de nilidéal non nul.*

Supposons en effet que X soit un nilidéal non nul de A, l'enveloppe injective de X contient un idempotent abelien non nul e. $Y = \hat{A}e \cap X$ est un nilidéal non nul; les éléments de eYe sont des éléments nilpotents de l'anneau réduit $e\hat{A}e$ (proposition 0.1); on a donc $eYe = 0$, soit $(Ye)^2 = Y^2 = 0$, et par conséquent $Y = 0$ ce qui est impossible.

Nous dirons qu'un anneau A vérifie la *propriété P* si tout idéal à gauche complément non nul contient un idempotent différent de zéro.

On rappelle qu'un *anneau de Zorn A* [4] est un anneau tel que tout idéal à gauche (ou à droite, c'est équivalent), qui n'est pas un nilidéal contient un idempotent non nul. Le radical de Jacobson R de A est le plus grand nilidéal de A, et dire que R est nul équivaut à dire que tout idéal à gauche non nul contient un idempotent différent de zéro et dans ce cas A est un anneau à idéal singulier à gauche (resp. à droite) nul.

LEMME 1.4. *Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P; alors*

(i) *Si e est un idempotent de A, eAe est un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P.*

(ii) *Si e est un idempotent abélien de A, e est un idempotent abelien de $\hat{A}$.*

(i) On montre facilement que si I et J sont deux idéaux à gauche de A, I essentiel dans J, alors eJe est extension essentielle de eIe et les idéaux compléments dans eAe sont de la forme eKe, où K est un idéal complément à gauche dans A.

(ii) Compte-tenu de la proposition 1.1, il suffit de démontrer que si A est un anneau semi-premier, à idéal singulier à gauche nul, vérifiant la propriété P, et dont les idempotents sont centraux, alors il vérifie la condition (C). Soient X un idéal à gauche de A et K un idéal à gauche complément relatif de X dans A. La propriété P entraîne que K est extension essentielle d'une somme directe $S = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$ où les e_i sont des idempotents de A. Les idempotents e_i étant centraux, on a pour tout $i \in I$, $e_iX = 0$, et par suite $(\bigoplus_{i\in I} Ae_i)\, X = 0$; on en déduit $SX = 0$ puisque A est à idéal singulier à gauche nul. Pour conclure, if suffit de remarquer que si x et y satisfont à $Ax \cap Ay = 0$, tout complément K relatif de Ay contenant x, vérifie $Ky = 0$.

THÉORÈME 1.5. *Pour un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul et satisfaisant à la propriété P les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Tout idéal complément à gauche non nul contient un idempotent abélien différent de zéro*

(ii) *$\hat{A}$ est de type I.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit f un idempotent non nul de $\hat{A}$. $\hat{A}f \cap A$ est un idéal à gauche complément dans A qui contient un idempotent abélien e non nul. Le lemme 1.4 montre que e est un idempotent abélien de $\hat{A}$ et tout idéal à gauche non nul de $\hat{A}$ contient un idempotent abélien différent de zéro, $\hat{A}$ est donc de type I [6].

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit X un idéal complément à gauche dans A, avec X non nul. Il existe un idempotent f de A tel que $X = \hat{A}f \cap A$; soit e un idempotent abélien de $\hat{A}$ contenu dans X et non nul. $\hat{A}e \cap A$ est un idéal à gauche complément contenant un idempotent non nul g et g est un idempotent abélien de A contenu dans X.

En particulier, ce théorème caractérise les anneaux de Zorn sans nilidéal non nul, dans l'enveloppe injective est de type I.

COROLLAIRE 1.6. [Roos, 10] *Soit A un anneau de Zorn dont le radical de Jacobson est nul; alors si A est un anneau de Baer, dire que A est de type I équivaut à dire que $\hat{A}$ est de type I.*

EXEMPLE. Soit A un anneau dont le radical de Jacobson est nul; si le socle gauche de A est essentiel dans A alors A est un anneau de Zorn dont l'enveloppe injective est de type I.

Remarque. Il existe des anneaux de Baer A de type I, dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ est de type I, bien que A ne soit pas semi-premier:

Soit A l'anneau des matrices M triangulaires avec

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \text{ élément d'un corps } K.$$

A est de type I, $\hat{A}$ est semi-simple et l'idéal bilatère ensemble des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotent.

On a de façon plus générale le résultat suivant:

PROPOSITION 1.7.. *Soit A un anneau de Baer extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à gauche co-irréductibles, alors A and $\hat{A}$ sont de type I.*

Rappelons qu'un module est dit *co-irréductible* si on enveloppe injective est indécomposable. On sait [1] que $\hat{A}$ est produit d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels, donc est de type I.

Montrons maintenant que A est de type I. Soit h un idempotent central de A tel que $B = Ah$ ne contienne aucun idempotent abélien; l'anneau B vérifie les mêmes conditions que A, il suffit donc pour démontrer la propriété de prouver qu'un anneau de Baer non nul B, extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à gauche co-irréductibles, contient un idempotent abélien différent de zéro.

Soit Bx, $x \neq 0$, un idéal à gauche co-irréductible de B, et soit Be l'annulateur à gauche de x, où e est un idempotent de B. $B(1-e)$ est un idéal à gauche co-irréductible de B, dont l'enveloppe injective $\hat{B}(1-e)$ est un idéal simple de $\hat{B}$. $(1-e)B(1-e)$, sous-anneau du corps $(1-e)\hat{B}(1-e)$, est intègre, et $(1-e)$ est donc abélien.

II. Enveloppes injectives des anneaux réduits

Dans les démonstrations, la propriété suivante sera fréquemment utilisée: Si x est un élément d'un anneau réduit A, la relation $ax = 0$ entraîne $xa = 0$ et l'annulateur de x est un idéal bilatère noté $\mathrm{Ann}(x)$; de plus la relation $Ax \cap \mathrm{Ann}(x) = 0$ montre que A est un anneau à idéal singulier nul.

THÉORÈME 2.1. *Pour un anneau réduit A, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\hat{A}$ est de type I.*

(ii) *La relation $Ax \cap Ay = 0$, où x et y sont deux éléments de A, entraîne $xy = 0$.*

(iii) *$\hat{A}$ est fortement régulier.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soient x et y deux éléments non nuls de A satisfaisant à $Ax \cap Ay = 0$; pour tout élément u de A on a:

$$Axux \cap Ayux = 0,$$

en effet la relation

$$ayux = bxux,$$

entraîne la suite d'implications suivantes:

$$(ay - bx)\,ux = 0 \Rightarrow ux(ay - bx) = 0 \Rightarrow uxay = uxbx$$
$$\Rightarrow uxay = 0 \Rightarrow ayux = 0.$$

Par suite, si Aux vérifie la condition (C), on a

$$(yux)(xux) = 0 \Rightarrow y(ux^2)^2 = 0 \Rightarrow (ux^2)\,y(ux^2) = 0,$$

d'où $yux^2 = 0$, on en déduit $uxyux = 0$, soit finalement $uxy = 0$.

Le théorème 1.2 montre que Ax est extension essentielle d'une somme directe

$$S = \bigoplus_{i \in I} Au_i x,$$

d'idéaux $Au_i x$ vérifiant la condition (C).

Ce qui précède entraîne:

$$u_i xy = 0, \text{ quel que soit } i \in I, \text{ d'où } Sy = 0$$

A étant un anneau à idéal singulier à gauche nul, y qui annule S, annule toute extension essentielle de S, donc Ax. D'où finalement $xy = 0$, ce qui achève la démonstration.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est une conséquence facile des propositions 1.1 et 0.1. L'équivalence des assertions (ii) et (iii) a été démontrée dans [8].

(iii) $\Rightarrow$ (i) Evident.

On rappelle qu'un anneau de Baer est de type III, s'il ne contient pas d'idempotents finis non nuls.

THÉORÈME 2.2. *Soit A un anneau réduit; l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A se décompose de façon unique en produit de deux anneaux $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ où $\hat{A}_1$ (resp. $\hat{A}_2$) est un anneau fortement régulier injectif (resp. un anneau régulier auto-injectif à gauche de type III).*

D'après Kaplansky [6], il existe un idempotent central h de $\hat{A}$ où $\hat{A}h$ est de type I et où $\hat{A}(1 - h)$ ne contient pas d'idempotents abéliens non nuls. Pour démontrer le théorème il suffit de prouver qu'il n'existe pas d'idempotents finis non nuls dans $\hat{A}(1 - h)$.

Supposons que f soit un idempotent fini non nul de $\hat{A}(1 - h)$; $\hat{A}f$ ne contient pas d'idempotents abéliens non nuls, et il existe donc, d'après la proposition 1.1, deux éléments x et y de $X = \hat{A}f \cap A$ satisfaisant à

$$Ax \cap Ay = 0, \qquad yx \neq 0.$$

La démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème 2.1 montre que que l'on a $Ax^2 \cap Ayx = 0$ et Ax^2 n'est pas un sous-module essentiel de Ax. Or, A étant un anneau réduit $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(x^2)$ et les modules Ax et Ax^2 sont isomorphes. On en déduit que l'enveloppe injective de Ax est isomorphe à l'un de ses facteurs directs propres, ce qui contredit le fait que f soit un idempotent fini.

Pour terminer la démonstration, il faut prouver que l'anneau $\hat{A}h$ est réduit. La démonstration de l'assertion (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème 2.1 se transporte sans aucun changement et elle montre que dans l'idéal $\hat{A}h \cap A$ de A la relation

$Ax \cap Ay = 0$ entraîne $xy = 0$, les propositions 1.1 et 0.1 montrent que h est un idempotent abélien, et que $\hat{A}h$ est réduit.

COROLLAIRE 2.3. [10] *Soit A un anneau intègre, si A admet un corps des fractions à gauche K, alors $\hat{A} = K$, sinon $\hat{A}$ est de type III.*

BIBLIOGRAPHIE

1. A. CAILLEAU, Anneau associé à un module riche en co-irréductibles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **264** (1967), 1040–1042.
2. A. CAILLEAU ET G. RENAULT, Sur l'enveloppe injective des anneaux de Baer, *C. R. Acad. Sci. Paris.* **268** (1969), 1381–1383.
3. P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. Fr.* **90** (1962), 323–348.
4. N. JACOBSON, "Structure of Rings," Amer. Math. Soc., Vol. 37, Providence R. I., 1956.
5. R. E. JOHNSON ET E. T. WONG, Self-injective rings, *Canad. Math. Bull.* **2** (1959), 167–174.
6. I. KAPLANSKY, "Rings of Operators," Benjamin, New York, 1968.
7. G. RENAULT, Étude des sous-modules compléments dans un module, *Mém. Soc. Math. France* **9** (1967).
8. G. RENAULT, Anneaux réduits non commutatifs, *J. Math. pures Appl.* **4** (1967), 203–214.
9. J. E. ROOS, Reports of the Midwest Category Seminar, 156–181, Springer–Verlag, Berlin/New York, 1967.
10. J. E. ROOS, Sur l'anneau maximal de fractions des Aw^*-algèbres et des anneaux de Baer, *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** (1968), 120–123.
11. Y. UTUMI, On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 141–147.